Problemes d'ofici

1. (Newton) Trobeu una fórmula tancada per a l'expressió:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx.$$

Primera solució

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx &&= \operatorname{Img}\left(e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix}\right) = \\
&= \operatorname{Img}\frac{e^{inx}e^{ix} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} &&= \operatorname{Img}\frac{e^{ix}\left(e^{inx} - 1\right)\left(e^{-ix} - 1\right)}{\left(e^{ix} - 1\right)\left(e^{-ix} - 1\right)} = \\
&= \operatorname{Img}\frac{e^{inx} - 1 - e^{i(n+1)x} + e^{ix}}{2 - 2\cos x} &&= \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{2(1 - \cos x)} = \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} &&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\,\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Segona solució

Cal tenir en compte que

$$2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + k\delta) = \cos\left(x + \frac{2k-1}{2}\delta\right) - \cos\left(x + \frac{2k+1}{2}\delta\right)$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\delta}{2}\sin x &= \cos\left(x - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right); \\
2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + \delta) &= \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3}{2}\delta\right); \\
&\vdots \\
2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + (n-1)\delta) &= \cos\left(x + \frac{2n-3}{2}\delta\right) - \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}\delta\right).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$2\sin\frac{\delta}{2}\left[\sin x + \cdots + \sin(x + (n-1)\delta)\right] = \cos\left(x - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}\delta\right).$$

Ara fem $\delta = x$ i obtenim

$$2\sin\frac{x}{2}\left[\sin x + \cdots + \sin nx\right] = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}$$

i finalment,

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. Donat el polinomi $x^3 + px^2 + qx + r$, trobeu les condicions que han de complir els coeficients p, q, i r per tal que les tres arrels del polinomi formin un triangle equilàter del pla complex.

Solució

Siguin z_1, z_2 i z_3 les arrels i z_0 el centre del triangle. Si z és el vector complex que va de z_0 a z_1, tindrem $z_1 = z_0 + z \cdot 1, z_2 = z_0 + z \cdot \epsilon, z_3 = z_0 + z \cdot \eta$, on $1, \epsilon$ i η són les arrels cúbiques de la unitat; el seu producte és 1, la seva suma és 0 i la suma de productes de dues en dues és 0.

$$\begin{aligned}
-p &= \sum z_i = 3z_0; \\
q &= \sum_{i<j} z_i z_j = 3z_0^2; \\
-r &= z_1 z_2 z_3 = z_0^3 + z^3.
\end{aligned}$$

D'aquestes relacions en surt que

$$q = \frac{p^2}{3}.$$

Recíprocament, si es compleix aquesta última relació entre p i q llavors fent el canvi $x = y - \frac{p}{3}$, l'equació es converteix en

$$y^3 + \frac{p^3}{27} + r = 0$$

que té solucions $y_1 = \alpha, y_2 = \alpha \cdot \epsilon$ i $y_3 = \alpha \cdot \eta$, on α és l'arrel cúbica real de $-r - \frac{p^3}{27}$. Resulta $x_1 = -\frac{p}{3} + \alpha, x_2 = -\frac{p}{3} + \alpha \cdot \epsilon$ i $x_3 = -\frac{p}{3} + \alpha \cdot \eta$, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter.

3. (OI 1962) Resoleu l'equació $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$.

Primera solució

Es compleix

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x &= 1 \\ \cos 2x + \cos 4x + \cos^2 3x &= 0 \\ 2\cos 3x \cos x + \cos^2 3x &= 0 \\ \cos 3x\,(2\cos x + \cos 3x) &= 0 \\ \cos 3x\,(\cos x + 2\cos x \cos 2x) &= 0 \\ \cos 3x \cos x\,(1 + 2\cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

i aquesta equació té solucions

$$\begin{array}{lllll} \cos 3x = 0, & x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z}; \\ \cos x = 0, & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}; \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}, & x = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{6} + k\pi \\ \dfrac{4\pi}{6} + k\pi \end{cases}, & k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Segona solució

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \cos^2 x; \\ \cos^2 2x &= \left[2\cos^2 x - 1\right]^2 = 1 - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x; \\ \cos^2 3x &= \left[4\cos^3 x - 3\cos x\right]^2 = 9\cos^2 x - 24\cos^4 x + 16\cos^6 x. \end{aligned}$$

D'on:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x + 1 = 1.$$

Si resolem ara aquesta equació, obtenim

$$\cos^2 x = 0, \qquad 8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0.$$

És a dir,

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

i hem acabat.

4. (OI 1965) Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

amb incògnites x_1, x_2, x_3. Els coeficients satisfan les condicions

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} són nombres positius;

(b) els altres coeficients són nombres negatius;

(c) a cada equació, la suma dels coeficients és positiva.

Demostreu que el sistema proposat només té la solució $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Solució

En ser el sistema homogeni solament cal veure que la matriu dels coeficients

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+a_{12}+a_{13}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{21}+a_{22}+a_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{31}+a_{32}+a_{33}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

té determinant no nul. Però, com que tots els parèntesis són positius, el segon determinant és negatiu i el tercer positiu, podrem assegurar que el determinant de la matriu del sistema és positiu si demostrem que

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Ara bé,

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{22} > -a_{23}$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{33} > -a_{32}$$

i per tant

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32} = a_{22}\,a_{33} - (-a_{23})\,(-a_{32}) > a_{22}\,a_{33} - a_{22}\,a_{33} = 0.$$

5. (OI 1963) Demostreu que $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Primera solució

Multiplicant i dividint l'expressió $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ per $2\sin\frac{\pi}{7}$ es té:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$$

Segona solució

Com que

$$-\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{7},$$

la suma de l'enunciat esdevé

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.$$

Siguin $1_{\frac{\pi}{7}}, 1_{\frac{3\pi}{7}}, 1_{\frac{5\pi}{7}}, -1, 1_{\frac{9\pi}{7}}, 1_{\frac{11\pi}{7}}, 1_{\frac{13\pi}{7}}$ les arrels de l'equació $x^7 + 1$, la suma de les quals és igual a 0, o equivalentment

$$1_{\frac{\pi}{7}} + 1_{\frac{3\pi}{7}} + 1_{\frac{3\pi}{7}} + 1_{\frac{9\pi}{7}} + 1_{\frac{11\pi}{7}} + 1_{\frac{13\pi}{7}} = 1.$$

La part real de l'anterior suma també és 1.

Així doncs

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{13\pi}{7} = 1,$$

però de $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ se'n dedueix que

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = 1$$

i d'ací el resultat.

6. (OI 1976) Sigui $P_1(x) = x^2 - 2$ i $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ per a $j = 2, 3, \ldots$. Demostreu que, per a qualsevol enter positiu n, les arrels de l'equació $P_n(x) = x$ són totes reals i diferents.

Primera solució

$P_1(x) = x^2 - 2$ té dos zeros a $\pm\sqrt{2}$ i un mínim al punt 0 on pren el valor -2.

$P_2(x)$ té dos mínims als punts $\pm\sqrt{2}$ on pren el valor -2 i un màxim al punt 0 on pren el valor 2. Com que $P_2(2) = P_2(-2)$ resulta que $P_2(2)$ ha de tenir 4 zeros.

Es pot demostrar per inducció sobre n que

a) $P_n(x)$ té 2^n zeros diferents α_i.
b) $P_n(x)$ té 2^{n-1} mínims β_j, on $P_n(\beta_j) = -2$.
c) $P_n(x)$ té $2^{n-1} - 1$ màxims γ_k, on $P_n(\gamma_k) = 2$.
d) $P_n(2) = P_n(-2) = 2$.
e) Tots els α_i, β_j i γ_k són diferents.

A la demostració cal tenir present que els zeros de P_n passen a ser mínims de P_{n+1} i que els màxims i mínims de P_n es converteixen en màxims de P_{n+1}.

A l'interval $[-2, 2]$ la funció polinòmica $F_n(x) = P_n(x) - x$ és positiva en els punts on P_n val 2, i és negativa en els punts on P_n val -2. Per tant s'ha d'anul·lar en 2^n punts diferents.

Nota. Els polinomis P_i estan relacionats amb els polinomis de Čebyšev a través de la relació

$$P_n(x) = 2T_{2^n}(x/2).$$

Segona solució

Sabem que

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1.$$

Fem $x(t) = 2\cos t$. Aleshores

$$\begin{aligned}
&P_1(x(t)) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t;\\
&P_2(x(t)) = P_1(P_1(x(t))) = 2\cos 4t;\\
&\quad\ldots \qquad\qquad \ldots\\
&P_n(x(t)) = 2\cos 2^n t.
\end{aligned}$$

Ara volem que $P_n(x(t)) = x(t)$, que en aquest context es transforma en $2\cos 2^n t = 2\cos t$. D'on:

$$\cos 2^n t = \cos t \quad \text{ssi} \quad 2^n t = \pm t + 2k\pi.$$

Finalment,

$$t = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \quad \text{i} \quad t = \frac{2k\pi}{2^n + 1}.$$